SOLUCIÓN

(a) Falsa. Si elegimos $x = 0$, entonces no es verdadero que $x^2 > 0$.

(b) Verdadera. Si x es negativa, entonces x^2 será positiva.

(c) Verdadera. Esta proposición contiene dos cuantificadores, "para cada" y "existe". Para leer el enunciado de manera correcta, debemos aplicarlo en el orden correcto. La proposición inicia "para cada", de modo que si la proposición es verdadera, entonces lo que sigue debe ser verdadero para todo valor de x que seleccionemos. Si no está seguro de que el enunciado completo sea verdadero, intente con algunos valores de x y vea si la segunda parte del enunciado es verdadero o falso. Por ejemplo, podríamos elegir $x = 100$, dada esta elección; ¿existe una y que sea mayor a x? En otras palabras, ¿existe un número mayor que 100? Por supuesto que sí. El número 101 lo es. Ahora, seleccionemos otro valor para x, digamos $x = 1{,}000{,}000$. ¿Existe una y que sea mayor que este valor de x? Nuevamente, sí; en este caso el número 1,000,001 lo sería. Ahora, pregúntese: "Si tengo que x es cualquier número real, ¿podré encontrar una y que sea mayor a x?" La respuesta es sí. Basta con elegir a y como $x + 1$.

(d) Falsa. El enunciado dice que existe un número real que es mayor que todos los demás números reales. En otras palabras, existe un número real que es el mayor de todos. Esto es falso; aquí está una demostración por contradicción. Suponga que existe un número real mayor que todos, y. Sea $x = y + 1$. Entonces $x > y$, lo cual es contrario a la suposición de que y es el mayor número real. ■

La **negación** de la proposición P es la proposición "no P". (La proposición "no P" es verdadera siempre que P sea falsa). Considere la negación de la proposición "para toda x, $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces debe existir al menos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa; en otras palabras, existe una x tal que "no $P(x)$". Ahora considere la negación de la proposición "existe un x tal que $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces no existe una x para la cual $P(x)$ sea verdadera. Esto significa que $P(x)$ es falsa sin importar el valor de x. En otras palabras, "para toda x, no $P(x)$". En resumen,

La negación de "para toda x, $P(x)$" es "existe una x tal que no $P(x)$".

La negación de "existe una x tal que $P(x)$" es "para toda x, no $P(x)$".

Revisión de conceptos

1. Los números que pueden escribirse como la razón (cociente) de dos enteros se denominan _______.

2. Entre cualesquiera dos números reales, existe otro número real. Esto significa que los números reales son _______.

3. La contrapositiva (contrarrecíproca) de "si P entonces Q" es _______.

4. Los axiomas y las definiciones son tomados como ciertos, pero_______ requieren de una demostración.

Conjunto de problemas 0.1

En los problemas del 1 al 16 simplifique tanto como sea posible. Asegúrese de eliminar todos los paréntesis y reducir todas las fracciones.

1. $4 - 2(8 - 11) + 6$

2. $3[2 - 4(7 - 12)]$

3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$

4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$

5. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$

6. $\frac{3}{4 - 7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$

7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right]$

8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$

9. $\dfrac{14}{21}\left(\dfrac{2}{5 - \frac{1}{3}}\right)^2$

10. $\left(\frac{2}{7} - 5\right)/\left(1 - \frac{1}{7}\right)$

11. $\dfrac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$

12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$

13. $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$

15. $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

16. $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

En los problemas del 17 al 28 realice las operaciones indicadas y simplifique.

17. $(3x - 4)(x + 1)$

18. $(2x - 3)^2$

19. $(3x - 9)(2x + 1)$

20. $(4x - 11)(3x - 7)$

21. $(3t^2 - t + 1)^2$

22. $(2t + 3)^3$

23. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

25. $\dfrac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$

26. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

27. $\dfrac{12}{x^2 + 2x} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x + 2}$

28. $\dfrac{2}{6y - 2} + \dfrac{y}{9y^2 - 1}$

29. Determine el valor de cada una de las expresiones siguientes; si no está definida, indíquelo

(a) $0 \cdot 0$ (b) $\frac{0}{0}$ (c) $\frac{0}{17}$

(d) $\frac{3}{0}$ (e) 0^5 (f) 17^0

30. Demuestre que la división entre 0 no tiene significado como sigue: Suponga que $a \neq 0$. Si $a/0 = b$, entonces $a = 0 \cdot b = 0$, lo cual es una contradicción. Ahora determine una razón por la que 0/0 también carece de significado.

En los problemas del 31 al 36 cambie cada número racional a uno decimal mediante una división larga.

31. $\frac{1}{12}$ **32.** $\frac{2}{7}$

33. $\frac{3}{21}$ **34.** $\frac{5}{17}$

35. $\frac{11}{3}$ **36.** $\frac{11}{13}$

En los problemas del 37 al 42 cambie cada decimal periódico por una razón de dos enteros (véase el ejemplo 1).

37. 0.123123123 . . . **38.** 0.217171717 . . .

39. 2.56565656 . . . **40.** 3.929292 . . .

41. 0.199999 . . . **42.** 0.399999 . . .

43. Como 0.199999 . . . = 0.200000 . . . y 0.399999 . . . = 0.400000 . . . (véanse los problemas 41 y 42), vemos que ciertos números racionales tienen diferentes expansiones decimales. ¿Cuáles son los números racionales que tienen esta propiedad?

44. Demuestre que cualquier número racional p/q, para el cual la factorización en primos de q consiste sólo en números 2 y números 5, tiene un desarrollo decimal finito.

45. Encuentre un número racional positivo y un número irracional positivo menores que 0.00001.

46. ¿Cuál es el menor entero positivo? ¿El menor racional positivo? ¿El menor número irracional positivo?

47. Encuentre un número racional entre 3.14159 y π. Note que $\pi = 3.141592....$

48. ¿Existe un número entre 0.9999... (los 9 se repiten) y 1? ¿Cómo concilia esto con el enunciado de que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe otro número real?

49. ¿El número 0.12345678910111213 14... es racional o irracional? (Debe observar un patrón en la sucesión de dígitos dada).

50. Encuentre dos números irracionales cuya suma sea racional.

≈ *En los problemas del 51 al 56 determine la mejor aproximación decimal que su calculadora permita. Inicie haciendo una estimación mental.*

51. $\left(\sqrt{3} + 1\right)^3$ **52.** $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^4$

53. $\sqrt[4]{1.123} - \sqrt[3]{1.09}$ **54.** $(3.1415)^{-1/2}$

55. $\sqrt{8.9\pi^2 + 1} - 3\pi$ **56.** $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

57. Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe un número racional. (*Sugerencia:* si $a < b$, entonces $b - a > 0$, así que existe un número natural n tal que $1/n < b - a$. Considere el conjunto $\{k: k/n > b\}$ y utilice el hecho de que un conjunto de enteros que está acotado por abajo contiene un elemento menor). Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe una infinidad de números racionales.

≈ **58.** Estime el volumen de su cabeza, en pulgadas cúbicas.

≈ **59.** Estime la longitud del ecuador, en pies. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas.

≈ **60.** ¿Alrededor de cuántas veces habrá latido su corazón en su vigésimo cumpleaños?

≈ **61.** El árbol llamado General Sherman, que está en California, tiene una altura de casi 270 pies y promedia alrededor de 16 pies de diámetro. Estime el número de tablones de madera de 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas que podrían fabricarse con este árbol, suponiendo que no haya desperdicio e ignorando las ramas.

≈ **62.** Suponga que cada año, el árbol General Sherman (véase el problema 61) produce un anillo de crecimiento de un grosor de 0.004 pies. Estime el aumento anual resultante en el volumen de su tronco.

63. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si hoy llueve, entonces trabajaré en casa.

(b) Si la candidata satisface todos los requisitos, entonces será contratada.

64. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si obtengo una A en el examen final, aprobaré el curso.

(b) Si termino mi artículo de investigación para el viernes, entonces tomaré un descanso la semana próxima.

65. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) (Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo.) Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

(b) Si el ángulo ABC es agudo, entonces su medida es mayor que 0° y menor que 90°.

66. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si la medida del ángulo ABC es 45°, entonces el ángulo ABC es agudo.

(b) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

67. Considere los enunciados del problema 65 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

68. Considere los enunciados del problema 66 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

69. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo triángulo isósceles es equilátero.

(b) Existe un número real que no es entero.

(c) Todo número natural es menor o igual a su cuadrado.

70. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo número natural es racional.

(b) Existe un círculo cuya área es mayor que 9π.

(c) Todo número real es mayor que su cuadrado.

71. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos? Suponga que x y y son números reales.

(a) Para toda x, $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$.